

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO**

**MATEMÁTICA A**  
**10º ANO**

**Cursos Científico-Humanísticos de  
Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas**

**Autores**

Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)  
Maria Graziela Fonseca  
Arsélio Almeida Martins  
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca  
Ilda Maria Couto Lopes

**Homologação**  
22/02/2001

---

Departamento do Ensino Secundário

---

# Matemática A

Cursos Gerais de

Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias, Ciências Sócio-Económicas

---

## 1 Introdução

A Matemática aparece, para os Cursos Gerais de Ciências Naturais, Ciências e Tecnologias e Ciências Sócio-Económicas, como uma disciplina trienal da componente de Formação Específica a que é atribuída uma carga horária semanal de 4h 30m dividida por aulas de 90 minutos ao longo de 33 semanas lectivas.

A componente de Formação Específica destina-se a promover uma formação científica e técnica sólida, no domínio do conhecimento do respectivo curso, em que a Matemática é considerada uma das disciplinas essenciais do domínio do conhecimento respectivo e está concebida de forma a respeitar o princípio de continuidade pedagógica, contrariando a fragmentação e atomização de saberes, facilitando e exigindo uma gestão mais integrada dos programas.

A Matemática é uma disciplina muito rica que, num mundo em mudança, abrange ideias tão díspares como as que são utilizadas na vida de todos os dias, na generalidade das profissões, em inúmeras áreas científicas e tecnológicas mais matematizadas e, ao mesmo tempo, é uma disciplina que tem gerado contribuições significativas para o conhecimento humano ao longo da história.

O programa de Matemática é organizado por grandes temas. Por um lado, os temas matemáticos têm de ser escolhidos de tal modo que competências fundamentais que a aprendizagem matemática pode favorecer sejam contempladas. Por outro, eles têm de estar ligados a necessidades reais e fornecer instrumentos de compreensão do real com utilidade compreensível imediata. Devem ainda poder ser motor de compreensão da Matemática como um todo em que cada tema se relaciona com outros e em que a aprendizagem de cada assunto beneficia a aprendizagem de outros. Cada assunto, embora desenvolvido mais detalhadamente dentro da leccionação de um tema, deve ser assunto interessante e útil na abordagem dos diversos temas.

Ao longo dos três anos do ensino secundário, os estudantes abordarão os seguintes temas: números e geometria, incluindo vectores e trigonometria; funções reais e análise infinitesimal; estatística e probabilidades.

A abordagem da Geometria inclui assuntos de geometria sintética e métrica, geometria analítica e vectorial e trigonometria com as competências de cálculo numérico a elas associadas.

A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista - gráfico, numérico e algébrico - sobre tipos simples de funções, desde as algébricas inteiras (que são as tratadas no 10<sup>o</sup> ano), passando pelas fraccionárias e acabando nas transcendentais - exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas. Neste grande tema, será realizada uma abordagem ao cálculo de variações e de limites, bem como ao estudo da continuidade, sem recurso inicial às definições simbólicas rigorosas.

A abordagem da Estatística e das Probabilidades completará as aprendizagens básicas, com algumas novas noções e ferramentas que não podiam ser compreendidas no ensino básico. O ensino de todos estes temas tem de ser suportado em actividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas sobre as quais se coloquem questões significativas e se fomente a resolução de problemas não rotineiros.

As questões de lógica e de teoria de conjuntos são referidas entre os temas transversais, com um determinado desenvolvimento. Procura-se, deste modo, influenciar os professores no sentido de não abordar estas questões como conteúdo em si, mas de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica que os actos de ensino e de aprendizagem sempre comportam, e só na medida em que elas vêm esclarecer e apoiar uma apropriação verdadeira dos conceitos. Como temas transversais consideram-se as formas de organizar o pensamento e as actividades de resolução de problemas, as aplicações e a modelação matemática, aspectos da história da matemática, da comunicação matemática e da utilização da tecnologia. Não podem nem devem ser localizadas temporalmente na leccionação e muito menos num determinado ano de escolaridade, antes devem ser abordadas à medida que forem sendo necessárias e à medida que for aumentando a compreensão sobre os assuntos em si, considerando sempre o sentido de oportunidade, as vantagens e as limitações.

Em muitos aspectos, a organização dos temas e as indicações metodológicas integram informações sobre a oportunidade de abordar questões de experimentação no ensino da matemática, de integrar o recurso à tecnologia, de abordar conceitos de lógica e raciocínio, de incorporar a história da matemática assim como informações sobre novos tipos de instrumentos de avaliação.

Os inevitáveis problemas das transições entre ciclos tornaram necessário conceber o 10<sup>o</sup> ano de uma nova forma, particularmente nas primeiras semanas de aulas, em que estratégias de recuperação e de acompanhamento dos jovens devem ter uma grande relevância. Nesse sentido, considera-se um módulo inicial no qual se incluem conceitos prévios considerados verdadeiramente essenciais e estruturantes que deverão ser especialmente trabalhados com os estudantes nas primeiras duas ou três semanas de aulas do 10<sup>o</sup> ano e sempre que se venha a revelar necessário. O programa de Matemática contempla este módulo inicial. Pretende-se que os estudantes sejam colocados perante a resolução de problemas escolhidos que permitirão despistar dificuldades e deficiências na formação básica e acertar estratégias de remediação. A estratégia assente na resolução de problemas evita ainda que os estudantes sem dificuldades sejam desgastados em revisitações expositivas de assuntos que já dominam.

Sempre que o professor detectar nos estudantes lacunas inultrapassáveis em temas de ciclos anteriores, deve desencadear mecanismos de remediação. Os apoios integrados nestes mecanismos devem ser organizados de forma diversificada, não se limitando a meras aulas de repetição. As escolas devem estudar os melhores meios de pôr em prática um sistema de apoio e remediação, introduzindo mecanismos de avaliação e regulação da sua actividade e dos seus resultados, nomeadamente criando condições institucionais — tempo, horários compatíveis, designação dos professores — e organizativas — tempo, constituição de grupos de estudantes/turmas a propor para apoio.

## 2 Apresentação do Programa

### 2.1 Finalidades

O ensino da Matemática participa, pelos princípios e métodos de trabalho praticados, na educação do jovem para a autonomia e solidariedade, independência empreendedora, responsável e consciente das relações em que está envolvido e do ambiente em que vive.

Genericamente, a Matemática é parte imprescindível da cultura humanística e científica que permite ao jovem fazer escolhas de profissão, ganhar flexibilidade para se adaptar a mudanças tecnológicas ou outras e para sentir-se motivado a continuar a sua formação ao longo da vida. A Matemática contribui para a construção da língua com a qual o jovem comunica e se relaciona com os outros, e para a qual a Matemática fornece instrumentos de compreensão mais profunda, facilitando a selecção, avaliação e integração das mensagens necessárias e úteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado sempre que necessário.

Finalmente, a Matemática é uma das bases teóricas essenciais e necessárias de todos os grandes sistemas de interpretação da realidade que garantem a intervenção social com responsabilidade e dão sentido à condição humana.

Assim, podemos apresentar como finalidades da disciplina no ensino secundário:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa;
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- Contribuir para o desenvolvimento da existência de uma consciência crítica e interventiva em áreas como o ambiente, a saúde e a economia entre outras, formando para uma cidadania activa e participativa.

**2.2 Objectivos e competências gerais**

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
<p>Desenvolver a confiança em si próprio:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Expressir e fundamentar as suas opiniões.</li> <li>■ Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios.</li> <li>■ Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade.</li> <li>■ Procurar a informação de que necessita.</li> </ul> <p>Desenvolver interesses culturais:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa.</li> <li>■ Interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas.</li> <li>■ Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.</li> </ul> <p>Desenvolver hábitos de trabalho e persistência:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada.</li> <li>■ Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova.</li> </ul>	<p>Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.</li> <li>■ Seleccionar estratégias de resolução de problemas.</li> <li>■ Formular hipóteses e prever resultados.</li> <li>■ Interpretar e criticar resultados no contexto do problema.</li> <li>■ Resolver problemas nos domínios da Matemática, da Física, da Economia, das Ciências Humanas, ...</li> </ul> <p>Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Descobrir relações entre conceitos de Matemática.</li> <li>■ Formular generalizações a partir de experiências.</li> <li>■ Validar conjecturas; fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.</li> <li>■ Compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade.</li> </ul>	<p>Ampliar o conceito de número:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Aperfeiçoar o cálculo em <math>\mathbb{R}</math> e <math>\mathbb{C}</math> e operar com expressões racionais, com radicais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.</li> <li>■ Resolver equações, inequações e sistemas.</li> <li>■ Usar as noções de lógica indispensáveis à clarificação de conceitos.</li> </ul> <p>Ampliar conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Resolver problemas usando modelos físicos e geométricos (de incidência, paralelismo e perpendicularidade, secções, áreas e volumes).</li> <li>■ Utilizar vectores em referencial ortonormado.</li> <li>■ Resolver problemas de trigonometria, incluindo o uso de generalizações das noções de ângulos, arcos e razões trigonométricas.</li> </ul> <p>Iniciar o estudo da Análise Infinitesimal:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos, por via intuitiva, analítica e usando calculadora gráfica.</li> <li>■ Estudar sucessões definidas de diferentes formas.</li> <li>■ Aproximação gradual dos conceitos de continuidade, derivadas e limites.</li> <li>■ Aplicar conhecimentos de Análise Infinitesimal no estudo de funções reais de variável real.</li> </ul>

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
<p>Desenvolver o sentido da responsabilidade:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas.</li> <li>■ Avaliar situações e tomar decisões.</li> </ul> <p>Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades.</li> <li>■ Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças.</li> <li>■ Intervir na dinamização de actividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere.</li> </ul>	<p>Desenvolver a capacidade de comunicar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico.</li> <li>■ Interpretar textos de Matemática.</li> <li>■ Expressar o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens.</li> <li>■ Usar correctamente o vocabulário específico da Matemática.</li> <li>■ Usar a simbologia da Matemática.</li> <li>■ Apresentar os textos de forma clara e organizada.</li> </ul>	<p>Ampliar conhecimentos de Estatística e Probabilidades:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Interpretar e comparar distribuições estatísticas.</li> <li>■ Resolver problemas envolvendo cálculo de probabilidade.</li> <li>■ Resolver problemas de contagem.</li> </ul> <p>Conhecer aspectos da História da Matemática:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Conhecer personalidades e aspectos da criação e desenvolvimentos de alguns conceitos dentro da História da Matemática e sua relação com momentos históricos de relevância cultural ou social.</li> </ul>

A subdivisão dos Objectivos e Competências Gerais em *Valores/Atitudes*, *Capacidades/Aptidões* e *Conhecimentos* é uma característica fundamental do programa de Matemática do Ensino Secundário.

Para a generalidade dos cidadãos e especialmente para aqueles que vão utilizar conhecimentos matemáticos secundários, convém esclarecer que o ensino da Matemática não deve limitar-se a desenvolver a capacidade de usar as ferramentas do ofício: símbolos, regras lógicas e cálculos. Se é legítima a preocupação em ensinar a manejar as ferramentas, ela não pode prejudicar o essencial da aprendizagem da Matemática que deve ser procurado ao nível das ideias.

Muitos problemas foram, são e serão resolvidos sem recurso a notações científicas e às ferramentas de cálculo tal como a comunidade matemática as conhece hoje. Um cidadão com formação secundária necessita mais de noções que de notações para enfrentar as situações que precise de compreender (e esclarecer) e os problemas que tenha de resolver. Não quer isto dizer que o trabalho com as ferramentas matemáticas possa ser posto de lado no ensino secundário, mas antes quer dizer que o uso das ferramentas é ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu manejo e em que seja clara a vantagem do seu conhecimento. Finalmente, as aprendizagens significativas em Matemática não podem excluir características típicas do ensino experimental, sendo que as competências adquiridas por via da Matemática devem contribuir para alicerçar conhecimentos e formas de pensar sobre a ciência experimental.

A Matemática nas suas conexões com todos os ramos de saber é uma contribuição decisiva na criação de condições para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas.

### 2.3 Visão geral dos temas e conteúdos

É indispensável que o professor, além de conhecer bem o programa de cada ano que vai leccionar, tenha um conhecimento global do programa do ensino secundário (para ter conhecimento das conexões estabelecidas entre os diversos temas), bem como uma perspectiva integradora dos programas dos ciclos do ensino básico.

A escolha dos temas foi feita tendo em conta os conteúdos presentes em anteriores programas e a preocupação de algum equilíbrio entre as principais áreas da Matemática:

- Cálculo Diferencial
- Geometria (no plano e no espaço)
- Funções e sucessões
- Probabilidades (com Análise Combinatória) e Estatística

Os temas clássicos de Análise, Álgebra e Geometria estão presentes nestes conteúdos, embora o segundo se encontre distribuído pelos outros temas. Esta classificação deve ser considerada de forma muito relativa, tendo-se sempre em atenção que, no corpo do programa, assumem importância significativa tanto técnicas específicas como estratégias que, constituindo uma base de apoio que os estudantes utilizam na sua actividade matemática independentemente do tema, atravessam o programa de forma transversal. Referimo-nos aos temas transversais

- Comunicação Matemática
- Aplicações e Modelação Matemática
- História da Matemática
- Lógica e Raciocínio Matemático
- Resolução de Problemas e Actividades Investigativas
- Tecnologia e Matemática

que, sendo de difícil quantificação, não são por isso menos importantes que os temas antes referidos.

O programa de cada ano desenvolve-se por grandes temas, a tratar pela ordem indicada no programa. Deve ser feita uma planificação adequada de modo que não seja prejudicado o tratamento de nenhum dos temas e sejam integrados os conteúdos do tema transversal que se mostrem aconselhados. Tudo o que os temas transversais propõem deve ser abordado sistematicamente ao longo do ciclo. Não existem indicações taxativas sobre a sua distribuição ao longo dos anos, mas o desenvolvimento dos temas e as indicações metodológicas vão sugerindo alguns momentos onde os diversos temas transversais podem ser explorados. A criação de um ambiente propício à resolução de problemas deve constituir um objectivo central nas práticas dos professores já que a resolução de problemas é

um método fundamental e é considerada no programa não só como indicação metodológica mas também como tema. Contribuição fundamental para o desenvolver a capacidade dos alunos de raciocinar matematicamente e de usar a Matemática em situações diversas, a resolução de problemas aparece neste programa também como motivação, como sistema de recuperação e como forma privilegiada para suscitar a comunicação oral e escrita.

Para cada tema indica-se uma previsão do número de aulas necessárias à sua abordagem na leccionação. Não sendo mais do que uma previsão, essa indicação deve ser encarada com flexibilidade, sem prejuízo do peso relativo e da profundidade do tratamento desejado que o número de aulas previsto indicia. O professor deve ter como preocupação fundamental abordar e desenvolver, em cada ano, os variados tópicos do programa, pois eles fornecem métodos matemáticos diversificados e desempenham funções diferentes todas imprescindíveis para, em conjunto, contribuírem para a formação integral do cidadão autónomo e livre. Nunca se deve valorizar um conteúdo de tal forma que se possa prejudicar irremediavelmente a formação em algum dos grandes temas ou no desenvolvimento de alguma das capacidades/aptidões reportadas na redacção das finalidades e dos objectivos gerais deste programa de ensino.

As Conexões entre os diversos temas são consideradas fundamentais neste programa, para que os estudantes possam ver que os temas são aspectos complementares de uma mesma realidade.

Foi dada uma posição de destaque à Geometria e são dadas indicações que permitem que seja retomada em praticamente todos os outros temas do Programa. Nos temas de Geometria procura-se um equilíbrio entre a Geometria por via intuitiva e a Geometria Analítica, de modo a desenvolver tanto o raciocínio geométrico directo como a resolução de problemas de geometria por via algébrica, sem esquecer o desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica.

Inicia-se o 10<sup>o</sup> ano com o estudo da Geometria no Plano e no Espaço, porque a Geometria é, por excelência, um tema formativo no sentido mais amplo do termo que, pela resolução de problemas apropriados desenvolve variadas capacidades, desde a observação ao raciocínio dedutivo, ao mesmo tempo que deixa perceber verdadeiras conexões entre os vários temas da Matemática, da lgebra à Análise e à Estatística. É por isso que é tão importante, desde o início, trabalhar com a Geometria, tentando superar algumas (não todas necessariamente) eventuais dificuldades ou lacunas que os estudantes tenham. Começar por este tema permite o desenvolvimento de capacidades de visualização e representação através de figuras que tão necessárias são para o estudo de todos os outros temas. O professor deve aproveitar todas as ligações entre os temas em cada ano e de cada ano com os anos anteriores, por forma que o estudante encare a Matemática como um todo integrado e não como um conjunto fragmentado em temas, ao mesmo tempo que possibilita a ampliação e consolidação de cada conceito, sempre que ele é retomado. Em particular o professor deve estabelecer conexões entre os temas de cada ano; o facto de se recomendar que sejam tratados em momentos separados não pode significar que, dado o primeiro ele seja esquecido e meramente substituído pelo segundo.

Este texto é construído tendo por base 33 semanas lectivas de que se contam um mínimo de 30 semanas efectivas de aulas (incluindo avaliação); tendo em mente que a avaliação



não se deve circunscrever a aulas especificamente reservadas a tal nem se deve limitar a testes escritos (isto é, que o professor deverá recorrer a instrumentos diversificados de avaliação ao longo do ano lectivo integrando-os na aprendizagem matemática dos alunos), as aulas reservadas exclusivamente para testes escritos não devem ultrapassar cerca de 5% das aulas; temos assim um mínimo de 28 semanas de leccionação, ou seja, um mínimo de 84 aulas (correspondentes a 126 horas).



## 2.4 Sugestões Metodológicas Gerais

As finalidades e objectivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, contemple equilibradamente:

- o desenvolvimento de atitudes;
- o desenvolvimento de capacidades;
- a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização.

Tendo como pressuposto ser o estudante agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que

- os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
- os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
- se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural.

Neste contexto, destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação. Cabe ao professor, de acordo com a realidade da turma, encontrar o equilíbrio entre o número de trabalhos individuais, trabalhos de grupo, trabalhos de projecto e actividades investigativas, a realizar dentro e fora da aula, assim como o espaço para a sua própria intervenção: dinamizando, questionando, fazendo sínteses, facultando informação ...

O programa pretende dar continuidade, sem mudança brusca de nível, às aprendizagens realizadas no 3º ciclo, agora coincidente com o ensino obrigatório, ajustando-se ao nível de desenvolvimento e de cultura dos estudantes. Parte-se, quando possível, de problemas e situações experimentais para que, com o apoio na intuição, o estudante aceda gradualmente à formalização dos conceitos. São identificadas situações para estabelecer conexões entre os diversos temas de forma a proporcionar uma oportunidade de relacionar os vários conceitos, promovendo uma visão integrada da Matemática. Deu-se prioridade à criação de condições para uma grande diversidade de tipos de trabalho em Matemática, tanto de carácter geral como específicos de cada tema, em detrimento de um aprofundamento que na maioria das vezes é ilusório se não for cimentado na compreensão dos processos elementares. A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem, pretende também preparar os estudantes para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica.

### Capacidade de utilizar a Matemática

A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, constituem uma oportunidade de abordar o método científico. Em todos os temas do programa de matemática (Geometria, Funções e Estatística) se podem encontrar ferramentas fundamentais de modelação. O papel da matemática como instrumento de modelação da realidade é incontornável: um modelo matemático é uma descrição matemática do mundo real. A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geometria Descritiva, ... As actividades de investigação revelam-se também de particular interesse pois constituem um modo privilegiado para reforçar uma abordagem do método científico.

### **Raciocínio dedutivo**

No ensino secundário, o estudante deverá ser solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas. Noções muito elementares de Lógica devem ser introduzidas à medida que se revelem úteis à clarificação de processos e de raciocínios. A Axiomática das Probabilidades (muito simples) visa dar aos estudantes alguma cultura sobre a construção hipotético-dedutiva de uma Ciência. Alguns problemas de Geometria no Espaço podem ser excelentes oportunidades para praticar o raciocínio dedutivo.

### **Capacidades, cálculo e formalismo**

Em cada tema é importante encontrar-se um equilíbrio entre o desenvolvimento significativo dos conceitos, capacidades e aptidões e o domínio do cálculo. Do mesmo modo, a introdução da lógica, da linguagem matemática e simbólica, das formas de raciocínio científico (matemático e outros) deve estar presente em todas as ocasiões, impregnar o quotidiano da aprendizagem matemática, sem se transformar num conteúdo com valor em si mesmo. O grau de formalismo deve sempre ter em conta o nível de maturidade matemática dos estudantes e deve surgir, se possível como necessidade, depois de o professor ter a certeza que o estudante apropriou verdadeiramente o conceito.

### **Comunicação**

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, sempre que tal for aconselhável, à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese. Esta evolução decorrerá naturalmente da necessidade de comunicar aos outros as suas ideias. Assim, deve ser incentivada com alguma regularidade a realização de trabalhos designados genericamente por “composições matemáticas”. A comunicação matemática (oral ou escrita) é um meio importante para que os estudantes clarifiquem o seu pensamento, estabeleçam conexões, reflectam na sua aprendizagem, aumentem o apreço pela necessidade de precisão na linguagem, conheçam conceitos e terminologia, aprendam a ser críticos. Cada estudante deve receber do professor estímulo e oportunidades frequentes para falar, escrever, ler e ouvir nas aulas de matemática (e fora delas) pois assim estarão a organizar, consolidar e ampliar o seu conhecimento matemático. O estudante deve possuir oportunidades para expor um tema preparado, a resolução de um problema

ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ..., devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado; recomenda-se que sejam, na medida do possível, apresentados oralmente perante a turma e discutidos com os colegas e o professor. O trabalho de grupo e em pares favorece a comunicação matemática pois os estudantes ganham em partilhar com os colegas e com o professor os seus métodos de resolução ou as justificações dos seus raciocínios.

### **Perspectiva histórico-cultural**

Actividades com uma perspectiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção e em constante interacção com outras ciências. Proporcionam também excelentes oportunidades para pesquisa de documentação. A informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura. Segundo D. J. Struik, o autor do livro “História Concisa das Matemáticas”, o uso da História da Matemática na aula é muito importante porque:

- satisfaz o desejo de saber como se originaram e desenvolveram os assuntos em matemática;
- o estudo dos autores clássicos pode proporcionar grande satisfação por si só, mas também pode ser útil no ensino e na investigação;
- ajuda a compreender a nossa herança cultural, não apenas pelas aplicações que a matemática tem tido, e ainda tem, à astronomia, física e outras ciências, mas também pela relação que tem tido, e continua a ter, com campos tão variados como a arte, a religião, a filosofia e os ofícios;
- oferece um campo de discussão comum com estudantes e professores de outras áreas;
- permite temperar o ensino e as conversas com algumas peripécias.

### **Papel do professor**

Na concretização da metodologia proposta cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o estudante na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa. Assume, neste nível de ensino, importância fundamental o contrato pedagógico a estabelecer com o estudante, na negociação e definição de consensos para os projectos de trabalho, na participação activa e responsável na gestão do processo ensino-aprendizagem. Em particular deve ser fomentado o trabalho de grupo e o trabalho de pares de estudantes. A valorização da vertente formativa da disciplina, só pode ser alcançada fomentando uma atitude positiva do estudante face à Matemática.

### 2.4.1 Avaliação

Avaliar os conhecimentos matemáticos dos estudantes significa reunir e analisar dados sobre o que estes sabem a respeito de conceitos e métodos matemáticos. Estes dados devem ser utilizados tanto pelos professores como pelos estudantes; os professores deverão utilizá-los para ajudar os estudantes a adquirir conhecimentos profundos e ideias claras sobre os conteúdos matemáticos. Pretende-se que a avaliação em Matemática não se restrinja a avaliar o produto final mas também o processo de aprendizagem e permita que o estudante seja um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem.

O professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificá-las. Deve propor ao estudante um conjunto de tarefas de extensão e estilo variáveis, algumas delas individuais e outras realizadas em grupo, de modo que, no conjunto, reflectam equilibradamente as finalidades do currículo. Só assim se contribuirá para promover outras competências e capacidades que se pretendem desenvolver no ensino secundário. Em particular recomenda-se fortemente que, em cada período, mais do que um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática (sob a forma de resolução de problemas, demonstrações, composições/reflexões, projectos, relatórios, notas e reflexões históricas ou outras) que reforce a importante componente da comunicação matemática (o trabalho pode ser proveniente de um trabalho individual, de grupo, de um trabalho de projecto ou outro julgado adequado). No corpo do programa aparecem muitas referências que poderão propiciar a utilização de novos instrumentos de avaliação.

As actividades de aprendizagem deverão ser encaradas como tarefas de avaliação representando, neste caso, o tempo empregue na sua execução um claro benefício para a aprendizagem dos estudantes. O professor pode ficar a conhecer o que os estudantes são capazes de fazer perante um problema concreto ou mediante uma proposta de investigação. Esses dados podem ser utilizados para orientar aprendizagens posteriores que ofereçam, aos estudantes, oportunidade de ir integrando as novas aprendizagens de forma positiva e consciente. A realização dessas actividades em trabalho de grupo permite aos estudantes adquirir uma certa prática para enfrentar novos problemas ou ideias matemáticas escrevendo e explicando claramente os seus resultados e comunicando as suas observações e soluções de forma clara, primeiro aos colegas em pequeno grupo, depois à turma e ao professor. A interacção com outros estimula a aparição de novos problemas, de novas ideias e de descobertas adicionais. Os estudantes deparam-se com formas diferentes da sua de resolver problemas e a compreensão conceptual é mais profunda e duradoura.

O professor, observando, interpelando os grupos discutindo com os estudantes, receberá de imediato grande quantidade de informação que se deseja possa ser complementada, sempre que possível, com a avaliação posterior de relatórios.

Mas, é claro, os testes escritos, em si mesmos, têm aspectos muito positivos e são muito importantes. Eles deverão aparecer em momentos de síntese e cumprir uma função diferenciada da dos outros instrumentos. A nível do Ensino Secundário existirá sempre um certo número de provas de âmbito nacional ou regional. Por um lado, o professor deve ter em conta na sua avaliação a existência destas provas (realizando provas de estilos diversificados, incluindo por exemplo algumas questões de escolha múltipla, que preparem os estudantes para enfrentar os momentos de avaliação global), mas, por outro lado, deve dessacralizá-las pois a verdadeira preparação para essas provas é feita trabalhando com

regularidade e afino ao longo do ano.

Para garantir um equilíbrio entre as diversas formas de avaliação recomenda-se fortemente que, na classificação final de um período, o peso dos testes escritos não ultrapasse, em regra, metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

Recomenda-se também a utilização de testes em duas fases que permitem o desenvolvimento da persistência na procura de soluções para situações novas, para além de contribuir para uma atitude de reflexão sobre a aprendizagem. Recomenda-se ainda a procura, nas brochuras de apoio ao programa, de exemplos e reflexões que ajudem a diversificação dos instrumentos de avaliação que este programa preconiza.

## 2.5 Recursos

Todas as Escolas Secundárias devem dotar-se quanto antes de Laboratórios de Matemática. A didáctica prevista para a Matemática no ensino secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- Material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico, “polydron”, sólidos de enchimento,...);
- Quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- Livros para consulta e manuais;
- Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...);  
    Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas,...) incluindo em formato de CD-ROM e na Internet.
- Calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas;
- Computadores;
- Sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Os recursos escolhidos deverão ter em vista tanto a sua utilização na própria sala do Laboratório de Matemática, como uma utilização de recursos adequados em salas de aulas indiferenciadas. É considerado indispensável o uso de

- calculadoras gráficas (para trabalho regular na sala de aula ou para demonstrações com todos os estudantes, usando uma calculadora com “view-screen”);
- uma sala de computadores com “software” adequado para trabalho tão regular quanto possível;

- um computador ligado a um “data-show” ou projector de vídeo (para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os estudantes ao mesmo tempo).

### 2.5.1 Tecnologia

Não é possível atingir os objectivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação matemática, embora não seja exigível que sejam todas tratadas simultaneamente em todas as ocasiões; em particular, recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, nalgumas situações, os estudantes tentarem identificar “modelos matemáticos que permitam a sua interpretação”. Não se trata aqui de substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio da tecnologia, mas sim combinar adequadamente os diferentes processos de cálculo, sem esquecer o cálculo mental. Na expressão feliz de Miguel de Guzmán, os estudantes devem ser preparados para um “diálogo inteligente com as ferramentas que já existem”. O uso de tecnologia facilita ainda uma participação activa do estudante na sua aprendizagem como já era preconizado por Sebastião e Silva, quando escrevia no “Guia para a utilização do Compêndio de Matemática” que “haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino . . . fosse . . . tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo”. O estudante deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia e, caso haja tempo, pode ser referido o problema da máquina de Turing, tal como o faz Ian Stewart quando aborda os limites da computabilidade no seu livro “Os problemas da Matemática”.

#### Uso de calculadoras gráficas

As calculadoras gráficas (que são também calculadoras científicas completíssimas), ferramentas que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O seu uso é obrigatório neste programa. Tendo em conta a investigação e as experiências realizadas até hoje, há vantagens em que se explorem com a calculadora gráfica os seguintes tipos de actividade matemática:

- abordagem numérica de problemas;
- uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
- uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
- modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;



- condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas;
- estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
- investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina. É importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a “copiar” o que vêem. A calculadora vai permitir que se trabalhe com um muito maior número de funções em que diversas características, como os zeros e os extremos, não se podem determinar de forma exacta; estas funções são importantes pois aparecem no contexto da resolução de problemas aplicados. É muito importante desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exacta; é importante ir sempre chamando a atenção dos estudantes para a confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos; sem estes aspectos não se pode desenvolver a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos. Com os cuidados referidos, e como experiências em Portugal e noutros países mostram, a calculadora gráfica dará uma contribuição positiva para a melhoria do ensino da Matemática.

### **Uso de computadores**

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da Geometria dinâmica, da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa. Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. Os programas de Geometria Dinâmica, de Cálculo Numérico e Estatístico, de Gráficos e Simulações e de Álgebra Computacional fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a estudantes. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente.

Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os estudantes poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional (nomeadamente nos Laboratórios de Matemática), além do partido que o professor pode tirar como ferramenta de demonstração na sala de aula usando um “data-show” com retroprojector ou projector de vídeo. Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível. Nesse sentido as escolas são incentivadas a equipar-se com o material necessário para que tal tipo de trabalhos se possa realizar com a regularidade que o professor julgar aconselhável.

### **Uso da internet**

Estando todas as Escolas Secundárias ligadas à Internet o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste novo meio de comunicação. Na bibliografia final são indicados alguns sítios recomendados; esses sítios contêm ligações para muitos outros de interesse. Para o trabalho com os estudantes apresentam-se como exemplos proveitosos os de projectos como "Pergunta Agora" ou "Investiga e Partilha" onde os estudantes podem colocar dúvidas ou partilhar a resolução de problemas (os projectos podem ser acedidos a partir da página da APM-Associação de Professores de Matemática). Como exemplo de um projecto de interesse geral para professores e estudantes e para divulgação da Matemática aponta-se o do projecto "Atrator-Matemática Interactiva" que pode ser visto em:

<http://www.fc.up.pt/atractor>

Deve ser explorada a utilização da Internet como forma de criação de uma boa imagem da Matemática. A participação em projectos internacionais é uma dessas formas. Algumas possibilidades são a comemoração do *dia do PI*, a participação no *Maior Acontecimento de Matemática do Mundo* e a participação na *Caça ao Tesouro* na Internet; indicações sobre essas actividades podem ser vistas, respectivamente, em:

[http://www.exploratorium.edu/learning\\_studio/pi/](http://www.exploratorium.edu/learning_studio/pi/)

<http://www.nctm.org/about/wlme/>

<http://softciencias.ccg.pt/>

### 3 Desenvolvimento do Programa

Apresenta-se, para cada ano e para cada grande tema, o desenvolvimento que pretende citar exaustivamente todos os conteúdos obrigatórios e facultativos. Em alguns casos, por se entender necessário um esclarecimento particular referem-se objectivos precisos nesse desenvolvimento dos temas. Há quem pense que se pode substituir o programa no seu todo pela lista de itens de conteúdo fornecidos no desenvolvimento dos diversos temas. Não é assim. As indicações metodológicas que acompanham o desenvolvimento dos temas esclarecem as questões estratégicas da metodologia de ensino e do "fazer matemática", definem as formas de abordar os conteúdos, sugerem oportunidades de introduzir outros conceitos e de estabelecer conexões, de utilizar tecnologia, de experimentar, etc., e só por isso são importantes e imprescindíveis partes do programa a par dos conteúdos. Podemos mesmo dizer que a forma de aprender a fazer matemática é um conteúdo do ensino de Matemática. Para além disso, as indicações metodológicas são importantes e imprescindíveis neste programa já que é nelas que se estabelecem em pormenor, para além da forma de abordagem, a profundidade requerida e o rigor exigido nas formalizações dos conceitos e definições, para além do tipo de exercícios e actividades que podem ser propostos aos estudantes. Resumindo, cada conteúdo do ensino secundário de Matemática não está mais do que esboçado no desenvolvimento dos temas; para efeitos deste programa, as indicações metodológicas não são simples indicações e concorrem até para a definição dos conteúdos de ensino. De acordo com o desenvolvimento de cada tema e o grau de profundidade a atribuir à abordagem de cada conteúdo, faz-se corresponder um determinado número de horas à leccionação de cada tema. Embora isso não constitua uma instrução rígida, é uma referência para a planificação sugerindo tempos para a abordagem de cada tema, de modo a que, mesmo com prejuízo do aprofundamento deste ou daquele conteúdo específico, todos os temas sejam abordados com todos os estudantes. Além do mais alguns tópicos são de tratamento facultativo; estes vão indicados com um (\*). Estes tópicos não significam um aumento do programa, mas fornecem uma boa ocasião de propiciar mais matemática a estudantes mais interessados, mesmo que haja apenas um ou dois desses estudantes em cada turma. Caso seja julgado conveniente pode indicar-se a estes estudantes o estudo de algum dos tópicos facultativos sob a forma de trabalho de projecto ou estudo extra aula. As indicações metodológicas, ao sugerir actividades e preocupações a ter, acabam também por sugerir diversificação de tipos de instrumentos e de oportunidades de avaliação das aprendizagens.

### 3.1 Temas Transversais

Neste programa, assumem importância significativa os temas transversais – conceitos, técnicas, métodos e estratégias – de que os estudantes se devem apropriar progressivamente ao longo de todo o ensino secundário.

A aprendizagem matemática dos estudantes passa por fases intuitivas e informais, mas, desde muito cedo, mesmo estas não podem deixar de ser rigorosas ou desprovidas de demonstrações correctas, bem como não podem passar sem um mínimo de linguagem simbólica. Na aprendizagem da matemática elementar dos ensinos básico e secundário são absolutamente necessárias as demonstrações matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (no sentido de deduções formais em teorias formais). Neste capítulo, chama-se a atenção para alguns assuntos que, não constituindo em si mesmos conteúdos do programa, são alguma da essência de muitos passos da aprendizagem de diversos assuntos e constituem elementos que ajudam os estudantes a compreender demonstrações e a racionalizar os desenvolvimentos desta ou daquela teoria. Como se pode ver pelo corpo do programa, não se pretende que a matemática ou matemáticas sejam introduzidas axiomáticamente, mas pretende-se que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente. Defende-se que os conceitos fundamentais e as suas propriedades básicas sejam motivados intuitivamente, mas defende-se que os alunos possam trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas, sem que, em algum momento, se confunda o grau de precisão de um conceito matemático com qualquer grau de "simbolização". Um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária que é uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática. A escrita simbólica das proposições matemáticas há-de aparecer, se possível naturalmente, para efeitos de precisão, condensação, economia e clareza de exposição.

O trabalho com aspectos da História da Matemática é fundamental e deve ser realizado com os mais diversos pretextos. Ao longo do programa dão-se algumas pistas para esse trabalho, que amplia a compreensão dos assuntos matemáticos com os dados da sua génese e evolução ao longo do tempo.

Outro trabalho que assume um papel fundamental para o ensino e aprendizagem é todo aquele que esclareça conexões (aplicações, modelação) com outros ramos da ciência.

A utilização da tecnologia no ensino da Matemática obriga a que, à medida que for sendo necessário e se justifique, se vá esclarecendo o funcionamento das calculadoras e computadores e as características de cada aplicação informática útil à matemática, ao mesmo tempo que se devem revelar e explicar as limitações da tecnologia disponível.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p>■ Comunicação Matemática</p> <p>■ Aplicações e Modelação Matemática.</p> <p>■ História da Matemática</p> <p>■ Lógica e Raciocínio</p> <p>■ Noções de lógica</p>	<p>A comunicação matemática deve ajudar os estudantes a organizar e consolidar o seu pensamento matemático; por isso se recomenda em primeiro lugar a realização regular de "composições matemáticas". Além do mais, o estudante deve possuir oportunidades para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ..., devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado; recomenda-se que sejam, na medida do possível, apresentados oralmente perante a turma e discutidos com os colegas e o professor. O trabalho de grupo e em pares favorece a comunicação matemática pois os estudantes ganham em partilhar com os colegas e com o professor os seus métodos de resolução ou as justificações dos seus raciocínios.</p> <p>Sempre que possível, o professor deve evidenciar aplicações da Matemática e deve estabelecer conexões entre os diversos temas matemáticos do currículo e com outras ciências. Este trabalho não deve resumir-se ao enunciado e resolução de problemas realistas que usam conhecimentos de diversas ciências. Deve ser discutido com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.</p> <p>A utilização de exemplos históricos ou a referência à evolução de conceitos matemáticos ajudará os estudantes a apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo. Algumas situações sugeridas: polinómios em Pedro Nunes, história do Cálculo Diferencial, história dos números complexos. Nas brochuras de apoio ao programa podem ser encontrados muitos exemplos interessantes: origens da geometria (Geometria 10<sup>o</sup>, pg 34-39), evolução das máquinas de calcular (Funções 10<sup>o</sup>, pg 28), função logarítmica (Funções 12<sup>o</sup>, pg 60-62), a régua de cálculo (Funções 12<sup>o</sup>, pg 66-69), história do teorema fundamental da álgebra (Trigonometria e números complexos, pg 79-84), etc.</p> <p>Todas as noções de lógica e teoria de conjuntos devem ser introduzidas à medida que vão sendo precisas ou recorrendo a exemplos concretos de matéria usada: resolução de equações e inequações, propriedades dos módulos, propriedades das funções, axiomática das probabilidades. Alguns pequenos exemplos ligados ao trabalho com <math>\mathbb{R}</math> e suas propriedades podem servir como exemplos de esclarecimento de alguma operação lógica. Terá de haver referências simultâneas a operações com condições e operações com conjuntos bem como à implicação formal e inclusão, para além das referências a algumas propriedades como a transitividade. Assuntos como a lei da conversão, as primeiras leis de De Morgan e os quantificadores não podem deixar de aparecer à medida que forem necessários.</p>



Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p>■ Tecnologia e Matemática</p>	<p>Finalmente, quando for oportuno (as probabilidades e a estatística são temas e momentos apropriados na falta de outros momentos) devem ser abordadas as diferenças entre raciocínio plausível e raciocínio demonstrativo, ao mesmo tempo que se abordam os diversos tipos de evidência científica. Estas abordagens constituem bases seguras para criar um espírito crítico construtivo capaz de destrinçar a qualidade relativa de cada uma das informações que o estudante recebe.</p> <p>A dimensão gráfica constitui uma componente incontornável do trabalho matemático, pelo que é importante o uso de tecnologia adequada (calculadora gráfica ou computador)</p> <p>É preciso ter presente que a "tecnologia" em si não está em causa como conteúdo de ensino, mas que são as aprendizagens que ela pode proporcionar que justificam o seu uso. O recurso à tecnologia pode auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos matemáticos e prepará-los para usar a matemática num mundo cada vez mais tecnológico. Como qualquer ferramenta, a tecnologia pode ser utilizada de um modo mais ou menos rico. Nunca deve ser utilizada como simples substituição de raciocínios básicos, mas sim de modo a enriquecer a aprendizagem matemática, tornando-a mais profunda.</p> <p>Um estudante deverá registar por escrito, com os comentários julgados adequados, as observações que fizer ao usar a calculadora gráfica, o computador ou outro material, descrevendo com cuidado as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados (desenvolvendo-se assim tanto o espírito crítico como a capacidade de comunicação matemática).</p>

## 3.2 10º ANO

### Módulo inicial

9 aulas de 90 minutos

#### Resolução de problemas

O professor deverá propor neste módulo problemas ou actividades aos estudantes que permitam consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3º ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o Ensino Secundário. Poderá partir de uma determinada situação, de um determinado tema, procurando evidenciar todas as conexões com outros temas tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática.

Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista. Se os estudantes estão a explorar, por exemplo, um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou a trabalhar com expressões algébricas.

Os problemas a tratar neste módulo devem integrar-se essencialmente nos temas Números, Geometria e Álgebra deixando para outra altura os problemas que se integrem no tema Funções ou Probabilidades e Estatística.

Pretende-se que os problemas a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.

A seguir são apresentados enunciados dos problemas que deverão ser propostos aos estudantes. Esta lista pode ser parcial ou totalmente substituída por outra que, em termos gerais, contemple os mesmos conhecimentos e capacidades; esses outros problemas deverão, de preferência, ser retirados de documentos oficiais relativos ao Ensino Básico.

- Unindo os pontos médios de um quadrilátero encontramos sempre um paralelogramo?
- Porque é que há só 5 sólidos platónicos?
- Estudo da possível semelhança entre garrafas de água de uma dada marca de 33cl, 50cl, 75cl e 1,5l.
- Como resolveu o matemático Pedro Nunes equações do primeiro e do segundo grau? Podemos identificar, nos seus escritos, o uso da fórmula resolvente ou pelo menos de alguns casos particulares? Que casos Pedro Nunes não considerou ou considerou impossíveis?
- Que números racionais são representáveis por dízimas finitas? Qual a dimensão do período de uma dízima infinita periódica?

Alguns destes problemas poderão ser substituídos, com vantagem, por actividades ou problemas ligados ao mundo real, propostos e planificados por um grupo de professores do conselho de turma de modo a integrar na sua resolução conhecimentos de várias disciplinas.

Durante este módulo inicial, se o professor detectar dificuldades no estudante, deverá delinear estratégias de superação dessas dificuldades. Deve fazer com que os estudantes tomem consciência clara das responsabilidades que também lhes cabem no desenvolvimento das suas aprendizagens. Superar dificuldades exige estudo e esforço e os jovens devem entender bem o seu papel neste processo.



## Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I

27 aulas de 90 minutos

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver no estudante uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver no estudante capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita. É aconselhável que os estudantes realizem pequenas investigações e façam depois relatórios utilizando linguagem matemática rigorosa (o que não significa que o estudante deva recorrer exclusiva ou prioritariamente à linguagem simbólica). Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo, com prejuízo absoluto do ponto de vista axiomático. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos fazendo surgir a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar. A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos. Devem dar-se a conhecer problemas históricos e propor ao estudante a resolução de pelo menos um. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria à qual estão ligados os nomes dos maiores matemáticos de todos os tempos (Euclides, Arquimedes, Newton, Descartes, Euler, Hilbert, entre muitos outros). Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de problemas concretos. Mesmo quando o estudante resolve um problema por via analítica o professor deve incentivá-lo a fazer uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação, ou seja, não se deve deixar que o estudante se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas. Para além disso o estudante deve descrever sempre com algum detalhe o processo utilizado, justificando-o adequadamente.

Devem apresentar-se aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica, perspectiva vectorial).

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve prolongar-se noutros temas.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p><b>Resolução de problemas de Geometria no plano e no espaço</b> (esta resolução de problemas tem por objectivo promover o aprofundamento da Geometria partindo da compreensão do plano, do espaço e dos sólidos geométricos) Alguns tópicos que poderão ser estudados na resolução de problemas ou em investigações:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- estudo das secções determinadas num cubo por um plano;</li> <li>- poliedros obtidos por truncatura de um cubo;</li> <li>- composição e decomposição de figuras tridimensionais;</li> <li>- um problema histórico e sua ligação com a História da Geometria.</li> </ul> <p><b>Geometria Analítica</b> <i>O método cartesiano para estudar geometria no plano e no espaço</i> ■ Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço. Correspondência entre o plano e <math>\mathbb{R}^2</math>, entre o espaço e <math>\mathbb{R}^3</math>. Conjuntos de pontos e condições. Lugares geométricos: circunferência, círculo e mediatriz; superfície esférica, esfera e plano mediador.</p>	<p>As actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos e o professor deve insistir para que o estudante exprima correctamente os seus raciocínios, oralmente e por escrito, através de pequenas composições. A linguagem matemática utilizada deve ser rigorosa embora seja de excluir a linguagem formal.</p> <p>Os problemas a propor aos estudantes não devem ser numerosos. Devem ser ricos e não se reduzir a propostas fragmentadas. É mais importante um problema bem explorado do que muitos tratados apressadamente.</p> <p>Aconselha-se que o professor privilegie, se possível através de pequenas investigações, o estudo do cubo (incluindo as secções nele determinadas por planos que o intersectem) assim como o estudo de alguns poliedros cujas arestas ou vértices estão assentes nas suas faces.</p> <p>É conveniente que o estudante fique a saber desenhar representações planas dos sólidos com que trabalha, a descrever a intersecção do cubo com um plano dado, a saber construir e a desenhar uma representação da intersecção obtida, utilizando as regras da perspectiva cavaleira (o estudante deve começar por modelar a situação, por exemplo, com sólidos de arestas, com sólidos transparentes ou de qualquer outro modo sugestivo).</p> <p>Compondo e decompondo figuras planas (ou tridimensionais) o estudante deve saber calcular ou relacionar áreas (ou volumes).</p> <p>Os problemas devem ser escolhidos de tal modo que possam sugerir outros e permitir abordagens segundo diferentes perspectivas (por exemplo, recorrendo primeiro às coordenadas e depois aos vectores).</p> <p>O professor deve propor ao estudante actividades que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial, quer no plano quer no espaço.</p> <p>O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter “as melhores coordenadas” experimentando com várias figuras no plano e no espaço.</p> <p><i>Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou o tema, recorrendo aos modelos já utilizados para fazer aparecer as novas noções</i> (referencial, coordenadas, vectores, ... ) levando o estudante a justificar determinadas proposições por mais de um processo. Só mais tarde deve recorrer a desenhos em perspectiva.</p> <p>No plano, o estudante deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente aos eixos coordenados e às bissectrizes dos quadrantes pares e ímpares. No espaço, o estudante pode também descobrir algumas relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados, aos eixos coordenados e aos planos bissectores dos diversos octantes.</p>

continua

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p>(*) Referência à elipse como deformação da circunferência.</p> <p>■ Vectores livres no plano e no espaço: componentes e coordenadas de um vector num referencial ortonormado; vector como diferença de dois pontos.</p> <p>■ Colinearidade de dois vectores. Equação vectorial da recta no plano e no espaço.</p> <p>■ Equação reduzida da recta no plano e equação <math>x = x_0</math>.</p>	<p>A circunferência e a superfície esférica devem ser tratadas essencialmente como lugares geométricos sem a preocupação de fazer múltiplos exercícios que envolvam apenas as suas equações (a definição de distância entre dois pontos no espaço aparecerá, naturalmente, ligada à determinação do comprimento da diagonal espacial de um paralelepípedo).</p> <p>O mesmo para a mediatriz/plano mediador (neste contexto só se deve trabalhar com equações de rectas/planos paralelos a eixos/planos coordenados ou que sejam bissetrizes/planos bissetores de quadrantes/octantes).</p> <p>A equação da elipse deve aparecer a partir da circunferência por meio de uma mudança afim de uma das coordenadas.</p> <p>A soma de vectores, a soma de um ponto com um vector e o produto de um escalar por um vector devem ser abordadas em contexto de resolução de problemas.</p> <p>Pretende-se que o estudante deduza propriedades de figuras geométricas (triângulos e quadriláteros) usando vectores e explore a ligação do cálculo vectorial com outras áreas.</p> <p>A equação vectorial da recta surge naturalmente associada ao produto de um escalar por um vector e à colinearidade de dois vectores. Pretende-se que os estudantes saibam escrever a equação vectorial de uma recta e assim identifiquem pelas suas coordenadas os pontos que lhe pertencam.</p> <p>O conhecimento da equação reduzida da recta deverá permitir que o estudante saiba escrever a equação de qualquer recta cujo gráfico lhe seja apresentado, sem para isso ser necessário fazer exercícios repetitivos.</p>

## Tema II - Funções e Gráficos. Funções polinomiais. Função módulo.

27 aulas de 90 minutos

Os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser ampliados com base no estudo analítico, numérico e gráfico devendo privilegiar o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas. Em particular faz-se o estudo detalhado de algumas funções polinomiais e da função módulo e resolvem-se analítica, gráfica e numericamente algumas equações e inequações.

Este tema tem uma ênfase muito grande na ligação entre as fórmulas e as representações geométricas. Esta ligação é muito importante para todos os que utilizarem matemática. A capacidade de as relacionar é uma capacidade fundamental para o mundo de hoje e do

futuro e assim este tema deverá fornecer uma formação para a vida toda tão básica como a tabuada.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo para diferentes tipos de situações problemáticas.

Todas as funções devem estar definidas apenas em intervalos (normalmente abertos); as funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos) apenas devem ser referidas no caso da função módulo ou a título de exemplo na introdução deste tema.

Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas; devem sempre traçar um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador escolhendo o melhor rectângulo de visualização; devem ser incentivados a elaborar conjecturas, evitando conclusões apressadas, sendo sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões. Devem ainda estudar situações em que uma descrição qualitativa satisfatória do comportamento da função só é possível com um gráfico múltiplo (conjunto de gráficos em diferentes rectângulos de visualização).

Um estudante deve ser confrontado com situações em que os erros de aproximação conduzam a resultados absurdos. Como forma de evitar muitas situações dessas, deve ser feita a recomendação genérica de nos cálculos intermédios se tomar um grau de aproximação substancialmente superior ao grau de aproximação que se pretende para o resultado.

### Pré-Requisitos:

Os estudantes devem conhecer a função afim; devem poder reconhecer essa função através do gráfico, esboçar o gráfico e devem conhecer algumas propriedades (monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos de equações). Os estudantes devem saber resolver equações e inequações do 1º grau e resolver equações do 2º grau. Os estudantes devem conhecer os números reais e representar intervalos de números reais.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p>■ Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.</p>	<p>Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras disciplinas que os estudantes frequentem — Física, Química, Economia, etc. — como de situações reais — por exemplo de recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos de Geometria, devendo retomar-se alguns exemplos estudados no tema anterior.</p>

*continua*

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p>■ Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:</p> <p>i) funções quadráticas;</p> <p>ii) função módulo;</p> <p>e recorrendo a:</p> <p>a) análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);</p> <p>b) transformações simples de funções: dada a função, esboçar o gráfico das funções definidas por <math>y = f(x) + a</math>, <math>y = f(x + a)</math>, <math>y = af(x)</math>, <math>y = f(ax)</math>, <math>y =  f(x) </math>, com <math>a</math> positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p> <p>(*) Referência breve à parábola, a algumas das suas principais propriedades e à sua importância histórica.</p> <p>■ Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com particular incidência nos graus 2, 3 e 4).</p> <p>■ Possibilidade da decomposição de um polinómio em factores (informação). Decomposição de um polinómio em factores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra.</p> <p>(*) Estudo elementar de polinómios interpoladores.</p>	<p>As propriedades sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos <math>YY</math> e à origem, limites nos ramos infinitos. Os estudantes devem determinar pontos notáveis e extremos tanto de forma exacta como de forma aproximada (com uma aproximação definida <i>a priori</i>) a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou computador.</p> <p>No estudo das famílias de funções os estudantes podem realizar pequenas investigações.</p> <p>O estudo das transformações simples de funções deve ser feito tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica ou computador; a função <math>f</math> tanto pode ser dada a partir de um gráfico como a partir de uma expressão analítica.</p> <p>Esta referência breve não pressupõe nenhuma propriedade em particular mas antes que os estudantes fiquem com uma visão culturalmente mais completa do assunto.</p> <p>Na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à Modelação Matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados). Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar, por exemplo quando for conveniente decompor um polinómio em factores. O estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado. A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica.</p>

## Tema III - Estatística

15 aulas de 90 minutos

Algumas das noções que se tratam nesta unidade já foram abordadas no 3º ciclo e, por isso, é possível em qualquer altura reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente.

O estudante deverá ficar a saber organizar, representar e tratar dados recolhidos em bruto (ou tabelados) para daí tirar conclusões numa análise sempre crítica e sempre consciente dos limites do processo de matematização da situação. É importante que o estudo da Estatística contribua para melhorar a capacidade dos estudantes para avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários quer notícias ou outras informações em que a interpretação de dados ou a realização da amostragem não tenha sido correcta.

Este tema fornece uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os estudantes incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os estudantes devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo uma análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar a mensagem. No estudo deste tema o estudante deve recorrer à calculadora gráfica ou ao computador e às suas potencialidades para resolver muitos dos problemas.

**Pré-Requisitos:** Estatística do 3º ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p><b>Estatística – Generalidades</b></p> <p>■ Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. Clarificação de quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico; exemplificação de tais fenómenos com situações da vida real, salientando o papel relevante da Estatística na sua descrição.</p>	<p>Deve-se chamar a atenção para o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.</p>

*continua*

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p>■ <b>Recenseamento e sondagem.</b> As noções de população e amostra. Compreensão do conceito de amostragem e reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas; distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Noções intuitivas sobre as escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de concepção.</p> <p>■ <b>Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.</b></p> <p><b>Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)</b></p> <p>■ <b>Análise gráfica de atributos qualitativos</b> (gráficos circulares, diagramas de barras, pictogramas); determinação da moda;</p> <p>■ <b>Análise de atributos quantitativos:</b> variável discreta e variável contínua. Dados agrupados em classes.</p> <p>■ <b>Variável discreta;</b> função cumulativa.</p> <p>■ <b>Variável contínua:</b> tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráficos (histograma, polígono de frequências); função cumulativa.</p> <p>■ <b>Medidas de localização de uma amostra:</b> moda ou classe modal; média; mediana; quartis.</p>	<p>Sendo a Estatística a Ciência que trata dos "dados", num procedimento estatístico estão envolvidas, de um modo geral, duas fases: uma fase de organização dos dados recolhidos, em que se procura reduzir, de forma adequada, a informação neles contida - <b>Estatística Descritiva</b>, e uma segunda fase, em que se procura tirar conclusões e tomar decisões para um conjunto mais vasto, de onde se recolheram os dados - <b>Inferência Estatística</b>. Existe, no entanto, uma fase pioneira, que diz respeito à aquisição dos próprios "dados". Deve-se realçar a importância de, ao iniciar qualquer estudo estatístico, proceder cuidadosamente ao planeamento da experiência que conduz à recolha dos "dados" que serão objecto de tratamento estatístico.</p> <p>Deve-se chamar a atenção para o facto de que a organização dos dados, consiste em resumir a informação neles contida através de tabelas, gráficos e algumas medidas, a que damos o nome de "estatísticas". Nesta fase, em que se substitui todo o conjunto dos dados, por um sumário desses dados, devem-se tomar as devidas precauções, pois nem todos os instrumentos de redução de dados se aplicam a todos os tipos de dados. Assim, de entre esses processos deve-se ter presente quais os mais adequados e em que situações é ou não convenientes aplicá-los. A título de exemplo referimos o facto de não ter qualquer sentido calcular a média para dados de tipo qualitativo, mesmo que as diferentes categorias assumidas pela variável em estudo estejam representadas por números.</p>

*continua*

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
<p>■ Medidas de dispersão de uma amostra: amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis.</p> <p>■ Discussão das limitações destas estatísticas.</p> <p>■ Diagramas de “extremos e quartis”</p> <p><b>Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula.</li> <li>■ Coeficiente de correlação e sua variação em <math>[-1, 1]</math>.</li> <li>■ Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.</li> <li>■ Ideia intuitiva de recta de regressão; sua interpretação e limitações.</li> </ul>	<p>Generalizando o estudo de uma única variável, faz-se uma introdução ao estudo dos dados bivariados, insistindo na representação gráfica sob a forma do diagrama de dispersão ou diagrama de pontos. Quando, a partir desta representação, se verificar uma tendência para a existência de uma associação linear entre as duas variáveis em estudo, identifica-se uma medida que quantifica o grau de associação - o coeficiente de correlação, assim como se apresenta um modelo matemático que permitirá, conhecido o valor de uma das variáveis, obter uma estimativa para o valor da outra variável.</p>



## Bibliografia

Abrantes, P.; Ponte, J.P. et al. (1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Grupo "Matemática para todos-investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática

Este livro reúne um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto "Matemática para Todos" à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de actividades de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes (este e seguinte), "as actividades de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática". De acordo com os organizadores dos livros "o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da actividade investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas actividades das escolas".

Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J.P. et al. (1996) *Investigar para aprender matemática*. Grupo "Matemática para todos-investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ver comentário a *Investigações matemáticas na aula e no currículo*.

Araújo, Paulo Ventura (1998). *Curso de Geometria*. (Trajectos Ciência, Vol. 5) Lisboa: Gradiva

É um excelente livro para complementar a formação em Geometria de qualquer professor de Matemática do Ensino Secundário (e do Ensino Básico). Escrito numa linguagem muito clara e sugestiva, o autor, ao longo de 26 capítulos, vai desde os primeiros axiomas da geometria euclidiana até aos surpreendentes meandros da geometria não euclidiana (em particular a geometria hiperbólica). A abordagem é a da chamada geometria métrica (em que os números reais, para medir distâncias, são introduzidos muito cedo) que é muito mais simples para um principiante. O livro tem ainda vários capítulos sobre transformações geométricas. São de salientar a definição geométrica rigorosa das funções trigonométricas, a discussão da noção de área, a demonstração da fórmula de Herão e uma introdução interessante à noção de centro de massa complementada com a recomendação de leitura do livro *A Física no dia-a-dia* (Ed. Relógio de gua, 1995) de Rómulo de Carvalho.

Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática Col*. Ciência Aberta, Vol. 98 (2ª ed., 1998). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é "um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação" ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática "mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real". Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos

conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

Departamento de Educação Básica(1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

Esta publicação do Departamento de Educação Básica constitui uma importante fonte de informação sobre a Matemática do ensino básico em Portugal absolutamente necessária para quem lecciona no ensino secundário.

Figueira, Mário R. S. (1997). *Fundamentos de Análise Infinitesimal* Textos de Matemática, Vol. 5, 2ª ed. Lisboa: Departamento de Matemática, FCUL

Este é um livro de texto para os estudantes da licenciatura em Matemática mas é de leitura acessível a todos os que procurem uma apresentação rigorosa dos temas elementares de funções reais de uma variável real. Começa com um estudo do conjunto dos números reais a partir de uma axiomática (referindo-se a relação entre  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  assim como a representação decimal e a representação geométrica dos reais). O livro contém os temas clássicos de funções de uma variável com uma exposição muito clara, complementada com bastantes exemplos e exercícios. Alguns temas menos habituais aparecem ao longo deste volume, como o estudo dos desenvolvimentos assintóticos ou a definição das funções trigonométricas a partir da noção de comprimento de arco.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM. (1999) *Estatística e Calculadoras Gráficas*. Grupo de trabalho T3-Portugal APM. Lisboa: APM

Esta publicação contém actividades sobre Estatística, redigidas tendo em vista uma possível utilização na sala de aula; contém ainda comentários sobre as actividades e propostas de resolução das mesmas.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM(1999). *Geometria com Cabri-Géomètre*. Lisboa:APM.

Esta publicação contém actividades de geometria para utilização na sala de aula utilizando o programa de geometria dinâmica Cabri-Géomètre II; essas actividades são graduadas de modo que se tenha um domínio progressivo do programa a partir dos procedimentos mais elementares. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem elementos de geometria plana, fractais, cónicas, transformações geométricas e geometria analítica.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM. (1999). *Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas actividades são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das actividades. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem funções definidas por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função

quadrática. A publicação contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

Hughes-Hallett, Deborah; Gleason, Andrew M. et al. (1997) *Cálculo* vol. 1. Rio de Janeiro: LTC (1997) .

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: *A Regra de Três* (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o *Modo de Arquimedes* (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão seguramente boas inspirações a qualquer professor.

Junqueiro, M; Valente, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas* Lisboa: APM

Este é um livro que contém uma série de materiais para a sala de aula, premiados no "IV Concurso de materiais de apoio à utilização e integração das TIC nos ensino Básico e Secundário" do Ministério da Educação. Os materiais estão divididos em dois grupos: 11 para utilizar com estudantes e 4 para os professores utilizarem na sua formação (totalmente adequados a auto-formação). Os materiais estão elaboradas para serem usados com o Cabri-Géomètre mas podem ser usados com qualquer outro Ambiente Geométrico Dinâmico (como o Geometer's Sketchpad). As actividades deste livro incluem temas como polígonos, cónicas, tangentes a uma circunferência, mediatriz. Uma excelente oportunidade para começar a trabalhar Geometria com um computador.

Loureiro, C. (coord.), Franco de Oliveira, A., Ralha, E. e Bastos, R. (1997). *Geometria: Matemática – 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que é de consulta indispensável.

Martins, M. E. G. (coord.), Monteiro, C., Viana, J. P. e Turkman, M. A. (1997). *Estatística: Matemática – 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que é de consulta indispensável.

Moore, David(1966). *Introduction to the Practice of Statistics*. New York: Freeman

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário

Moore, David(2000). *Statistics, The Science of Data For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World*, Part II, 5th ed. New York: Freeman.

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário

Moore, David(1966). *The Basic Practice of Statistics*. New York: Freeman

Livro recomendado pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário

Oliveira, P. (2000). *Brevíssima História dos Números Complexos*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 2 APM. Lisboa: APM.

A história dos complexos é uma referência obrigatória para a lecionação do tema.

Ponte, J. P.(coord.), Boavida, A. M., Graça, M. e Abrantes, P. (1997) *Didáctica: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que é de consulta indispensável.

Ponte, J.P.; Canavaro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias* (Universidade Aberta, Vol 128). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

Ponte, J. P.(coord.), Brunheiro, L., Abrantes, P. e Bastos, R. (1998) *Projectos Educativos: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática B, pelo que é de consulta indispensável.

Sebastião e Silva, J.(1975-78). *Compêndio de Matemática* (5 vols) Lisboa: MEC – GEP.

Os Compêndios de Matemática de Sebastião e Silva são referências obrigatórias e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados no ensino secundário.

Sebastião e Silva, J.(1975–77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC – GEP.

Estes livros são o ponto de referência de muitos aspectos deste programa e constituem material base indispensável para o trabalho dos professores. As "Normas Gerais" contidas no 1º volume do Guia devem ser objecto de reflexão por parte dos professores. Na primeira dessas Normas pode ler-se: "A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos estudantes é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os estudantes e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

Stewart, Ian (1996). *Os Problemas da Matemática*. Ciência Aberta, Vol. 72, 2ª ed. Lisboa: Gradiva

O que é a Matemática? Segundo Ian Stewart a Matemática é sobre ideias não sobre símbolos e contas que são apenas ferramentas do ofício. O objectivo da matemática é perceber como diferentes ideias se relacionam entre si, pondo de lado o acessório e penetrando no âmago do problema. A Matemática não se preocupa apenas com a obtenção da resposta certa, mas sobretudo com o perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma. Ainda segundo Ian Stewart há, pelo menos, cinco fontes distintas de ideias matemáticas: número, ordenação, forma, movimento e acaso. Os problemas são a força motriz da Matemática, sendo os exemplos outra fonte importante de inspiração da Matemática, conforme assinala o mesmo autor.

Struik, D. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Este livro é uma referência clássica na História da Matemática, recomendando-se a segunda edição por conter um anexo relativo à História da Matemática em Portugal.

Teixeira, P. (coord.), Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C. e Nápoles, S. (1997). *Funções: Matemática – 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática A, pelo que é de consulta indispensável.

Valadares, J.; Graça, M. (1998) *Avaliando ... para melhorar a aprendizagem* Lisboa: Plátano.

Este livro, de muito interesse para qualquer professor de Matemática, analisa diversos aspectos teóricos e práticos da avaliação, sem esquecer uma perspectiva histórica. Contém numerosos exemplos de construção de variados tipos de itens de avaliação (e não só para a Matemática). Analisa com bastante pormenor as diferentes fases do processo de avaliação e as características fundamentais dos instrumentos de avaliação (como a validade e a fidelidade).

Veloso, Eduardo(1998). *Geometria - Temas actuais – Materiais para professores Col. "Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário"*, vol. 11. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço

<http://www.iie.min-edu.pt/iie/edicoes/livros/cdces/cdces11/index.html> .

Vieira, A.; Veloso, E.; Lagarto, M. J. (org.).(1997) *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens de uso da História da Matemática na sala de aula: "Porquê estudar História da Matemática" de Dirk Struik, "A utilização da História em Educação Matemática" de John Fauvel e "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" de Frank Swetz.

## CD-ROM

Fiolhais, C; Paiva, J. (coord).(1998).*CD-ROM – Omniciência 98* Coimbra: Soft-Ciências.

Este CD contém dois programas de Matemática (relacionados com trigonometria e fractais), vários programas de Física com interesse para a Matemática (como o programa Kepler que simula o movimento de estrelas e planetas) e vários textos relacionados com a História da Matemática.

Teodoro, V. et al. *CD-ROM – Software Educativo para Física e Matemática* Lisboa: DEP-GEF/ME.

Este CD contém 10 programas para ambiente "Windows", quase todos com muita relevância para o ensino da matemática no secundário. Destacamos um programa de Estatística, um de Geometria Descritiva (o GD) que, com uma linguagem simples, permite construir sólidos e rodá-los no espaço, o programa Thales e vários programas com interesse para o estudo das funções (envolvendo situações de modelação com funções).

## Páginas na INTERNET

Associação de Professores de Matemática

<http://www.apm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que APM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.

Departamento do Ensino Secundário – Matemática no Secundário

<http://www.mat-no-sec.org>

O Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação ao criar este espaço, pretende dar uma ajuda a todos os professores na recolha de informações úteis à sua prática pedagógica, contribuindo para a sua auto-formação e actualização. Nesta página poderá encontrar os Programas de Matemática do Ensino Secundário (Programa Ajustado), as Brochuras de apoio à concretização das orientações curriculares, o InforMat, boletim de informação, divulgação e debate do ensino da Matemática, apresentação de actividades a desenvolver na sala de aula e de actividades interactivas prontas a serem utilizadas, os endereços de páginas da Internet com informações úteis sobre a Matemática e a Educação Matemática e destaques com notícias e informações úteis

Miguel de Guzmán Ozámiz

<http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm>

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática o seu ensino e a sua história. Salientamos o curso "Laboratório de Matemática", as actividades de Geometria com o DERIVE e os textos de divulgação da Matemática.

Mocho e Mocho Sábio

Centro de Competência Nónio século XXI "Softciências"

<http://softciencias.ccg.pt/mocho/>

Esta página contém um índice de páginas sobre Matemática em língua portuguesa; o Mocho Sábio contém páginas especialmente recomendadas pela sua qualidade científica e pedagógica.

Modellus web page

Vítor Teodoro (SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)

<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais e ficheiros de actividades que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática do secundário.

### Projecto ALEA

Instituto Nacional de Estatística e Escola Secundária Tomaz Pelayo

<http://alea-estp.ine.pt/>

Esta página contém documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do ensino secundário. Além de uma série de páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, tem páginas com temas de actualidade relacionados com a Estatística, jogos didácticos, um forum de discussão e uma Galeria Virtual com trabalhos de escolas.

### Reajustamento do Programa de Matemática

<http://www.terravista.pt/AguaAlto/5783>

Esta página da Internet irá contendo indicações de apoio a este programa, como materiais de apoio e listas de endereços com interesse para professores e estudantes.

### Sociedade Portuguesa de Matemática

<http://www.spm.pt/~spm>

Esta página contém a indicação dos projectos que SPM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO**

**MATEMÁTICA A**  
**11º ANO**

**Cursos Científico-Humanísticos de  
Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas**

**Autores**

Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)  
Maria Graziela Fonseca  
Arsélio Almeida Martins  
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca  
Ilda Maria Couto Lopes

**Homologação**

01/04/2002

# Matemática A

Programa do 11º Ano

## Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II

30 aulas de 90 minutos (10 semanas)

A trigonometria tem a sua origem no estudo da medição de triângulos. Problemas relacionados com a navegação, a topografia, a indústria de moldes, entre muitos outros, exigem a resolução de triângulos. Mais tarde ao serem estudadas as funções trigonométricas veremos aparecer o seno e o co-seno como modelos matemáticos para fenómenos periódicos tais como variações de temperatura, de marés,..., mas nesta primeira abordagem, para além da resolução de problemas que envolvam triângulos, trata-se somente de ampliar o conceito de ângulo que passa a ser encarado como "gerado" por uma semi-recta em movimento (sentido positivo ou negativo) bem como o estudo do círculo trigonométrico e a resolução de algumas equações trigonométricas simples. O tempo deve ser dedicado à compreensão dos conceitos e às aplicações ligadas a problemas reais, reduzindo-se a ênfase em exercícios de cálculo. Espera-se que, sempre que seja possível, os estudantes apropriem conceitos e técnicas matemáticas enquanto enfrentam situações, de tal modo que, face a problemas realistas possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias. A continuação do estudo da Geometria, com a noção de produto escalar e suas aplicações, ligado à resolução de problemas, deve permitir ao aluno melhorar as suas capacidades de visualização e representação aumentando a sua intuição geométrica. Devem continuar a explorar-se as ligações da Geometria aos outros conteúdos. Os conhecimentos adquiridos nesta unidade devem mostrar ao aluno como a linguagem das coordenadas e dos vectores lhe fornece novos utensílios para resolver problemas já abordados noutras perspectivas.

Vários conceitos deste tema (como os vectores, a trigonometria e as funções trigonométricas) são importantes na disciplina de "Física e Química". Por isso é vantajoso haver uma colaboração estreita entre os professores de Matemática e de "Física e Química" nos cursos gerais onde existam as duas disciplinas. Convém que a terminologia e resultados usados por ambos os professores seja coerente para não confundir os alunos. Convém que os exemplos usados numa disciplina sejam conhecidos pelo professor da outra disciplina para que possam ser eventualmente explorados de novo como suporte a novas aprendizagens ou actividades. A modelação matemática e as aplicações poderão ser exploradas de forma muito natural nalgum destes contextos. Poderá haver, nalgum aspecto, um aprofundamento maior do que o indicado no programa, se isso for feito em coordenação com o professor da disciplina de "Física e Química". Certos conceitos poderão ser até introduzidos na disciplina de "Física e Química" e depois consolidados na disciplina de Matemática, ainda no 11º ou apenas no 12º ano.

Pré-requisitos: Trigonometria do Ensino Básico e Geometria do 10º Ano

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Resolução de problemas que envolvam triângulos.</p> <p>■ Ângulo e arco generalizados:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– radiano;</li> <li>– expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos.</li> </ul> <p>■ Funções seno, co-seno e tangente:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– definição; variação (estudo no círculo trigonométrico);</li> <li>– comparação de senos e co-senos de dois números reais.</li> </ul>	<p>No ensino básico, os estudantes tiveram contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria, logo o professor deve propor, agora, problemas variados, ligados a situações concretas, que permitam recordar e aplicar métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos,...) bem como aperceberem-se da importância da Trigonometria para as várias Ciências. Os estudantes devem ser solicitados a deduzir as razões trigonométricas em <math>\pi/6</math>, <math>\pi/4</math> e <math>\pi/3</math> radianos por se considerar que é importante que se conheçam alguns valores exactos das funções trigonométricas, nomeadamente para que mais tarde possam confirmar pontos do traçado de gráficos de funções trigonométricas. Isto não significa que se trabalhe preferencialmente com estes valores, até porque se usa a calculadora.</p> <p><u>A compreensão do círculo trigonométrico é fundamental.</u> A generalização das noções é intuída e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares pretendendo-se, agora, que, ao resolver problemas, os estudantes recordem os conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo e se enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuíveis. Pretende-se que os estudantes aprendam os conceitos de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas. É necessário que se apercebam da diferença em trabalhar por exemplo com <math>\text{sen}1</math> em graus e radianos de modo a ter sempre bem presente em que modo está a calculadora e interpretar convenientemente os resultados. Recorrendo ao círculo trigonométrico as relações entre as funções circulares de <math>\alpha</math>, <math>\pi/2 - \alpha</math>, <math>\pi/2 + \alpha</math>, <math>\pi - \alpha</math>, <math>\pi + \alpha</math> e <math>-\alpha</math>, aparecem naturalmente aos estudantes mobilizando unicamente a compreensão dos conceitos já adquiridos. Não tem pois sentido que lhes sejam propostos exercícios rotineiros em que estas relações intervenham. Não vale a pena sequer privilegiar estes valores. Podem propor-se bons problemas que lhes permitam desenvolver a aptidão para reconhecer ou analisar propriedades de figuras geométricas. É importante verificar que se mantêm as relações:</p> $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1; \text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} \quad \text{e} \quad 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$ <p>que devem ser usadas na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente. Equações trigonométricas elementares.</p>	<p>Recorrendo à compreensão, sempre ligada à interpretação do círculo trigonométrico, os estudantes desenvolvem a aptidão para mobilizar os conceitos já aprendidos com vista à resolução de condições simples. Assim as técnicas de resolução de equações não passam por listas exaustivas de fórmulas. Os estudantes desenvolvem a sua capacidade de transferir conhecimentos para novas situações (sempre ligadas à compreensão do círculo trigonométrico). Pode ser feita uma breve referência aos gráficos das funções trigonométricas podendo utilizar-se uma actividade de movimento circular que permita, por exemplo, passar do círculo trigonométrico para os pontos <math>(x, \text{sen}x)</math> do plano cartesiano.</p>
<p>■ Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço: – definição e propriedades; – expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores em referencial ortonormado.</p> <p>■ Perpendicularidade de vectores e de rectas; equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vector normal.</p> <p>■ Intersecção de planos e interpretação geométrica: – resolução de sistemas; – equações cartesianas da recta no espaço.</p> <p>■ Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial).</p>	<p>Podem propor-se algumas situações do âmbito da Física como forma de recordar e ampliar alguns aspectos do cálculo vectorial, designadamente, o trabalho de uma força. Como actividades de aplicação do conceito estudado, aparecem a determinação do ângulo de duas rectas e do declive de uma recta como tangente da inclinação no caso da equação reduzida da recta no plano. Também como aplicação importante deste novo conceito, os estudantes encontrarão a condição de perpendicularidade de vectores bem como novas formas de definir conjuntos seus conhecidos (no plano: mediatriz, circunferência ou recta tangente a uma circunferência num ponto dado; no espaço: plano mediador e superfície esférica). Poderá aparecer, ainda, como aplicação do conceito de produto escalar de dois vectores a dedução da fórmula do desenvolvimento de <math>\cos(x - y)</math>.</p> <p>O aluno encontra a equação cartesiana de um plano como outra aplicação do mesmo conceito.</p> <p>As equações cartesianas da recta decorrem do estudo da intersecção de planos, embora também os estudantes as possam encontrar a partir da equação vectorial da recta estudada no 10º ano.</p> <p>Os estudantes recorrem aos conhecimentos de cálculo vectorial já adquiridos para estabelecer, partindo sempre da visualização, as condições de paralelismo e perpendicularidade no espaço.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Programação linear - breve introdução.</p> <p>Domínios planos – interpretação geométrica de condições</p>	<p>A programação linear vai permitir ao estudante aplicar na resolução de problemas de extrema simplicidade e utilidade ( e que se apresentam hoje no domínio da Economia) conceitos aprendidos no 10º e ampliados no 11º.</p> <p><i>Recorda-se novamente que se dá a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois, o estudante, para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas da engenharia, arquitectura,... precisa de usar intuição e raciocínios geométricos. Ao professor compete assegurar que, neste estudo da Geometria, o estudante não se limita à "manipulação" de condições desligadas de situações concretas, sem qualquer esforço de interpretação. A aprendizagem dos novos conceitos aparece ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o estudante poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas)</i></p>

Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial I  
 Funções racionais e com radicais.  
 Taxa de Variação e Derivada

30 aulas de 90 minutos (10 semanas)

Com o uso numérico e gráfico de novas funções – racionais e envolvendo radicais – ampliam-se os conhecimentos do 10º ano relativos a funções. Tal como no 10º ano privilegiam-se funções que relacionam variáveis com significado concreto. As operações com funções são abordadas neste Tema. Serão estudadas funções inversas e funções compostas. As noções de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada desempenham um papel central neste Tema, sendo introduzidas recorrendo a um uso informal da noção de limite.

O conceito de taxa de variação é importante para as disciplinas de "Economia" e "Física e Química" pelo que é vantajoso que seja explorado em coordenação com estas disciplinas, nos respectivos cursos gerais. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização de actividades comuns ou a leccionação de algum aspecto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores.

Pré-requisitos: Os estudantes devem conhecer a função afim e a função definida por  $f(x) = k/x$ , com  $k > 0$  e  $x > 0$  e, evidentemente, todos os assuntos do Tema "Funções e Gráficos" abordado no 10º ano.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação</p>	<p>Este item prolonga-se por todo o Tema abrangendo progressivamente as novas classes de funções. Pretende-se que os estudantes recordem propriedades das funções e apreendam intuitivamente o conceito de taxa de variação de preferência num contexto de modelação matemática. Como exemplos sugerem-se as actividades <i>O Jogador de Ténis</i> ou <i>A bola no plano inclinado</i> – ver Brochura de Funções 11º ano (pp 99 e 100).          Ao resolverem problemas como <i>O volume constante</i>, <i>O comprimento de um vinco</i>, <i>Triângulo inscrito</i> ou <i>Intensidade da luz e CBL</i> – ver Brochura de Funções 11º ano (pp 90, 117, 118 e 139)–, os estudantes deparam-se com representantes de novas famílias de funções, que aparecem como boas oportunidades para discutir as noções de domínio de funções nos contextos das situações por elas modeladas.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções:</p> $f(x) = a + \frac{b}{cx + d}.$ <p>Neste estudo enfatiza-se a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.</p> <p>■ Conceito intuitivo de limite, de <math>+\infty</math> e de <math>-\infty</math>.</p> <p>■ Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.</p> <p>■ Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).</p>	<p>Valem aqui indicações metodológicas semelhantes às dadas para o Tema II – Funções e Gráficos, do 10º ano, pelo que não serão repetidas.</p> <p>Sugerem-se as seguintes propriedades: <i>domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíptotas, limites nos ramos infinitos.</i></p> <p>Afigura-se necessário propor problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas no 10º ano, tanto sob os aspectos analíticos como numéricos e gráficos. A resolução de equações e inequações fraccionárias aparecem num contexto de resolução de problemas.</p> <p>O conceito de limite, a ser formalizado mais tarde, deve ser utilizado de forma intuitiva (incluindo o de limite lateral esquerdo e direito). Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos <math>+\infty</math> e <math>-\infty</math>, devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso. Este conceito deve ser abordado de uma forma experimental.</p> <p>Retomando os conhecimentos de polinómios, o estudante deverá ser capaz de transformar expressões como</p> $\frac{x^2 + 2}{x + 1} \text{ em } x - 1 + \frac{3}{x + 1} \text{ ou } \frac{x + 3}{x + 1} \text{ em } 1 + \frac{2}{x + 1}$ <p>e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha em precisão, pois se efectua um número mais reduzido de operações. Por outro lado esta simplificação permite que se estude o comportamento no infinito sem necessidade de recorrer ao gráfico. Contudo, os estudantes devem efectuar este tipo de transformações e simultaneamente confirmarem pelo gráfico da função, antes de concluírem sobre o limite no infinito de uma função racional.</p> <p>Para calcular derivadas de funções simples, não é necessário invocar questões especiais sobre limites, basta recorrer à noção intuitiva. Poderemos pensar no intervalo <math>[x_0, x]</math> ou <math>[x, x_0]</math> e na função <math>f(x) = mx + b</math> e <math>\frac{mx+b-(mx_0+b)}{x-x_0} = \frac{m(x-x_0)}{x-x_0}</math> que, para <math>x \neq x_0</math>, vale <math>m</math> (qualquer que seja a distância <math> x - x_0 </math>). Do mesmo modo, se pode pensar para a derivada de outras funções. Por exemplo, para a função <math>f(x) = \frac{k}{x}</math>, a taxa média de variação no intervalo <math>[a, a + h]</math> é dada por</p> $\frac{\frac{k}{a+h} - \frac{k}{a}}{h} = \dots = -\frac{k}{a(a+h)}$ <p>que tende a ser <math>-k/a^2</math>, quando <math>h</math> tende a ser 0. A esta abordagem, está sempre associada a interpretação geométrica para a taxa média de variação e para a derivada (declives de secantes e tangentes às curvas das funções)</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.</p> <p>■ Constatação, por argumentos geométricos, de que:</p> <p><i>i.</i> se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;</p> <p><i>ii.</i> se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.</p> <p>(*) Referência à hipérbole; informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.</p> <p>■ Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).</p> <p>■ Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.</p> <p>■ Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos. Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).</p>	<p>Podem ser propostos alguns problemas simples que envolvam derivadas num contexto de aplicações</p> <p>Constate-se que quando as tangentes à curva de uma função em todos os pontos de abscissas de um intervalo aberto do seu domínio têm declives positivos (correspondente à derivada da função ser positiva em todos os pontos do intervalo aberto) a função é crescente nesse intervalo. De modo análogo para os restantes casos. Lembre-se que se opta por considerar que uma função é derivável num ponto <math>a</math> do seu domínio quando o valor da derivada é real: <math>f'(a) \in \mathbb{R}</math></p> <p>Não se pretende que os argumentos geométricos sejam apresentados como prova. Alguns resultados virão a ser demonstrados mais tarde.</p> <p>Os casos <math>x^3</math> e <math> x </math> são bons e simples (contra-)exemplos para que os estudantes compreendam que há funções que têm derivada nula num ponto sem que nele haja extremo e que há funções com extremo que não têm derivada real no ponto em que tal acontece.</p> <p>No caso da função inversa os estudantes precisam de analisar os casos em que será possível inverter uma função (poderá ser introduzida a noção de injectividade, apenas como noção auxiliar) e devem constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa. Será necessário introduzir a noção de raiz índice <math>n</math>. Tal deverá ser feito de forma algébrica. Só depois se falará na função inversa da função potência. Grau de dificuldade a não ultrapassar: <math>\sqrt{x+3}</math>, <math>\sqrt[3]{x+4}</math></p> <p>Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação de uma elipse a partir da sua propriedade focal (dados os focos).</p>



### Tema III – Sucessões Reais

24 aulas de 90 minutos (8 semanas)

A resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e especialmente úteis, bem como à necessidade de elaboração de representações formalizadas. Este assunto permite também, com facilidade e vantagens, a utilização intensiva de calculadoras. E permite exercícios de comunicação (pela fala e pela composição escrita). As propriedades das progressões e outras sucessões definidas por recorrência justificam a aprendizagem do método de indução matemática.

Pré-Requisitos: Os estudantes precisam de deter capacidades de cálculo elementares e devem dominar o conceito de função.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>Sucessões</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Definição e diferentes formas de representação</li> <li>■ Estudo de propriedades: monotonia e limitação</li> <li>■ Progressões aritméticas e geométricas: termo geral e soma de <math>n</math> termos consecutivos.</li> <li>■ Estudo intuitivo da sucessão de termo geral</li> </ul> $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ <p>num contexto de modelação matemática; primeira definição do número <math>e</math>.</p>	<p>As sucessões aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria — por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia — por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia — por exemplo, cálculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento,... O estudo das sucessões como funções de variável natural deve ser feito só depois de terem sido construídos vários exemplos/modelos. Mas a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo se podem introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão, etc. O estudo da monotonia, minorantes, majorantes, etc pode ser feito à medida que vão aparecendo como aspectos a considerar durante a resolução dos diferentes problemas. Do mesmo modo, podem ser abordadas as propriedades de certas sucessões (progressões). Estes problemas podem ainda servir para introduzir a definição por recorrência, para casos simples.</p> <p>Os estudantes podem utilizar livremente a calculadora para procurar responder aos problemas que lhes são propostos e devem procurar formas próprias de organização e expressão para a modelação das situações. O professor deve explorar o uso da calculadora e ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redacções, são introduzidas as redacções simbólicas consagradas. As redacções simbólicas serão testadas com exercícios rápidos</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>Limites</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.</li> <li>■ Limites de sucessões e convergência.</li> </ul> <p>Noção de limite real.  Ilustração de alguns resultados que justifiquem a unicidade do limite seguida da demonstração desse teorema.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ A convergência das sucessões monótonas e limitadas .</li> </ul> <p>Exemplos de sucessões monótonas não convergentes.  Exemplos de sucessões limitadas não convergentes.  Critério de majoração e teorema das sucessões encaadradas.</p> <p>■ Problemas de limites com progressões .</p> <p>(*) Estudo de casos simples de caos usando sucessões definidas por recorrência</p>	<p>Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc. podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de seqüências de termos chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contra-exemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais concepções alternativas e erradas. É bom que os estudantes utilizem conhecimentos já adquiridos sobre algumas funções reais de variável real e os transfiram com as devidas cautelas para as sucessões. É importante que se aproveitem momentos como este para obrigar os estudantes a reflectir (pedindo-lhes contra-exemplos em que os recíprocos nem sempre são válidos.). Deste modo, os estudantes ganham confiança nos seus próprios saberes e compreendem as novas aquisições como complementares e facilitadoras, aprofundamentos das suas competências para dar respostas a situações cada vez mais complexas.</p> <p>As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo as conclusões a tirar de cada exemplo e contra-exemplo. Após cada redacção em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redacção em simbologia matemática e devem então ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas sejam testadas.</p> <p>O estudante poderá ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os estudantes encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões. Descobrirão que têm comprimento (ou superfície) infinito e uma superfície (ou volume) finita (quer a tratem no plano ou no espaço).</p>

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO**

**MATEMÁTICA A**  
**12º ANO**

**Cursos Científico-Humanísticos de  
Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas**

**Autores**

Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)  
Maria Graziela Fonseca  
Arsélio Almeida Martins  
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca  
Ilda Maria Couto Lopes

**Homologação**

17/05/2002

# Matemática A

Programa do 12º Ano

## Tema I – Probabilidades e Combinatória

30 aulas de 90 minutos

As probabilidades fornecem conceitos e métodos para estudar casos de incerteza e para interpretar previsões baseadas na incerteza. Este estudo, que pode ser em grande parte experimental, fornece uma base conceptual que capacita para interpretar, de forma crítica, toda a comunicação que utiliza a linguagem das probabilidades, bem como a linguagem estatística. As técnicas de contagem que aqui aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades constituem uma aprendizagem significativa por si só, especialmente se desenvolverem mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas. Considera-se ainda que o tema das Probabilidades constitui uma boa oportunidade para a introdução de uma axiomática, uma das formas de organizar uma teoria matemática, permitindo que os estudantes tenham uma melhor compreensão do que é a actividade demonstrativa em Matemática. Finalmente, qualquer destes assuntos é bom para prosseguir objectivos de trabalho em aspectos da História da Matemática. Saliente-se que há muitos exemplos históricos interessantes no cálculo de probabilidades. É aconselhável a leitura da brochura de apoio a este tema.

### Pré-requisitos:

Noções elementares sobre conjuntos,

Probabilidades do 3º Ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p><b>Introdução ao cálculo de Probabilidades:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimentos.</li> <li>■ Operações sobre acontecimentos.</li> <li>■ Aproximações conceptuais para Probabilidade: <ul style="list-style-type: none"> <li>– aproximação frequencista de probabilidade;</li> <li>– definição clássica de probabilidade ou de Laplace.</li> <li>– definição axiomática de probabilidade (caso finito); propriedades da probabilidade.</li> </ul> </li> <li>■ Probabilidade condicionada e independência; probabilidade da intersecção de acontecimentos. Acontecimentos independentes.</li> </ul>	<p>Experiências que permitam tirar partido de materiais lúdicos e de simulações com a calculadora contribuirão para esclarecer conceitos através da experimentação e para dinamizar discussões de tipo científico, bem como para incentivar o trabalho cooperativo. A simulação e o jogo ajudam a construir adequadamente o espaço dos resultados e a encontrar valores experimentais para a probabilidade de acontecimentos que estão a ser estudados. É importante incentivar o estudante, sempre que possível, a resolver os problemas por vários processos, discutindo cada um deles com o professor e com os restantes colegas de modo a poder apreciar cada uma das formas de abordar o problema. O professor deve solicitar, frequentemente, que descrevam com pormenor, oralmente e por escrito, os raciocínios efectuados. É aconselhável elaborar boas formas de registo para os resultados das suas experiências de modo a poderem ser partilhadas em grupo. A axiomática das Probabilidades, por ser curta, permite alguns exercícios de verificação simples, capazes de motivar a apropriação da utilidade deste tipo de abordagem matemática. O facto de tanto as definições frequencista e clássica de probabilidade como a probabilidade condicionada satisfazerem a axiomática das Probabilidades permite compreender melhor o papel de uma axiomática em Matemática.</p>
<p><b>Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Variável aleatória; função massa de probabilidade: <ul style="list-style-type: none"> <li>– distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta; distribuição de frequências versus distribuição de probabilidades;</li> <li>– média versus valor médio;</li> <li>– desvio padrão amostral versus desvio padrão populacional.</li> </ul> </li> <li>■ Modelo Binomial.</li> <li>■ Modelo Normal; histograma versus função densidade.</li> </ul>	<p>Os estudantes já sabem como descrever os acontecimentos associados a uma experiência aleatória usando o espaço ou conjunto de resultados e sabem, ainda, como determinar a probabilidade de acontecimentos. Ora é muitas vezes necessário associar a uma experiência aleatória (associada a um modelo de probabilidade) valores numéricos pelo que é importante introduzir o conceito de variável aleatória bem como o de função massa de probabilidade. Os estudantes poderão utilizar simulações para construir distribuições empíricas de probabilidades. É importante que compreendam a relação entre as estatísticas e os parâmetros populacionais. Não é objectivo do programa entrar no estudo das variáveis contínuas mas o estudante poderá investigar se não haverá nenhuma representação que seja para a população o equivalente ao histograma na amostra. Das distribuições contínuas a mais conhecida foi obtida pelo matemático Gauss e tem hoje um papel importante já que muitos processos de inferência estatística a têm por base.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p><b>Análise Combinatória</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações.</li> <li>■ Triângulo de Pascal.</li> <li>■ Binómio de Newton.</li> <li>■ Aplicação ao cálculo de probabilidades.</li> </ul>	<p>No caso das contagens que sejam facilitadas por raciocínios combinatórios, é aconselhável que os estudantes comecem por contar os elementos um a um, utilizando exemplos (desde os mais simples até aos mais complicados), até que reconheçam a utilidade dos diagramas e depois das organizações simplificadoras. Os exemplos de conjuntos para a contagem podem surgir de situações problemáticas que lhes forem sendo propostas. Mesmo o triângulo de Pascal pode ser introduzido a partir de problemas. Muitos problemas postos podem e devem resultar da análise de jogos conhecidos. Os raciocínios combinatórios facilitam a abordagem de propriedades envolvendo combinações, mas não deve ser desprezada a ideia de, caso seja possível, introduzir conexões matemáticas - com métodos recursivos e fazendo alguma demonstração por indução matemática.</p> <p>Pascal, Tartaglia e Laplace são exemplos "interessantes" para realizar incursões na história dos conceitos matemáticos, na vida dos matemáticos, nas ligações da Matemática com outros ramos de saber e actividade. É importante referir que muitos resultados de contagens já eram conhecidos anteriormente noutras civilizações (por exemplo, o triângulo de Pascal era conhecido na China vários séculos antes de Pascal)</p>

## Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial II

30 aulas de 90 minutos

Aqui são estudados de forma mais rigorosa conceitos já utilizados antes de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada. O estudo das funções é ampliado com as funções exponencial e logarítmica.

Vários conceitos deste tema são importantes noutras disciplinas como “Física”, “Química”, “Economia” e “Geografia”. Por isso é bastante importante haver uma colaboração estreita entre os professores de Matemática e os das outras disciplinas. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização das actividades comuns ou a leccionação de algum aspecto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores.

Pré-requisitos:

Funções e Gráficos do 10º ano.

Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11º ano.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p><b>Funções exponenciais e logarítmicas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Função exponencial de base superior a um; crescimento exponencial; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por <math>f(x) = a^x</math> com <math>a &gt; 1</math></li> <li>■ Função logarítmica de base superior a um; estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por <math>f(x) = \log_a x</math> com <math>a &gt; 1</math>.</li> <li>■ Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.</li> <li>■ Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais.</li> </ul>	<p>Com as novas famílias de funções surgem, também, novas oportunidades para cada estudante obter uma maior compreensão da matemática e suas aplicações, bem como para conectar e relacionar os novos conhecimentos com os já adquiridos em anos anteriores (quer dentro do mesmo tema quer com temas diferentes). É fundamental apresentar aos estudantes actividades diversificadas (ver, por exemplo, brochura de apoio ao programa sobre este tema) tendo-se em conta que a exploração com a utilização das várias tecnologias pode permitir discussões ricas, quer sobre o processo de modelação, quer sobre os conceitos matemáticos fundamentais, para além de facilitarem propostas aconselháveis de investigações.</p> <p>Os estudantes precisam de desenvolver a compreensão de procedimentos algébricos e utilizá-los (a par da utilização da calculadora) sem que para isso tenham que fazer exercícios repetitivos.</p> <p>A modelação com funções exponenciais e logarítmicas pode ser feita tanto usando capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados), como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p><b>Teoria de limites</b></p> <p>■ Limite de função segundo Heine. Propriedades operatórias sobre limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Assíntotas. Continuidade.</p> <p>■ Teorema de Bolzano–Cauchy (informação) e aplicações numéricas.</p>	<p>As indeterminações são referidas apenas para mostrar as limitações dos teoremas operatórios. o programa apenas pressupõe que se levantem as indeterminações em casos simples. Dificuldade a não exceder:</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{x^2 + 3}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}); \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ <p>É aconselhável que os estudantes experimentem numérica e graficamente a relação entre os limites no infinito da exponencial, da potência e dos logaritmos.</p>
<p><b>Cálculo Diferencial</b></p> <p>■ Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras). Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Segunda definição do número <math>e</math>. Teorema da derivada da função composta (informação).</p> <p>■ Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica).</p> <p>■ Estudo de funções em casos simples.</p> <p>■ Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.</p>	<p>Derivada da função composta: grau de dificuldade a não ultrapassar <math>f(ax)</math>, <math>f(x+b)</math>, <math>f(x^k)</math></p> <p>É importante analisar em todos os teoremas a necessidade das condições do enunciado através de contra-exemplos.</p> <p>Deve ser adoptada a definição: <math>f</math> é derivável quando a derivada existe.</p> <p><math>e</math> é o único número real tal que <math>(e^x)' = e^x</math>.</p> <p>O estudo de funções deve seguir o modelo que se encontra na brochura de funções pag 149 e que combina métodos analíticos com o uso da calculadora gráfica.</p> <p>Dificuldade a não ultrapassar:</p> $f(x) = 2^{-x} + 2^x, f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}, f(x) = \frac{x}{1 - \log x}$ <p>Os estudantes poderão realizar trabalhos individuais ou em grupo de História do Cálculo Diferencial referindo o trabalho de alguns matemáticos como Fermat, Newton, Leibniz, Berkeley, Anastácio da Cunha, Bolzano, Cauchy, etc. É obrigatória a referência a José Anastácio da Cunha; com esse pretexto referir um pouco de história da Matemática em Portugal desde o tempo dos descobrimentos até à actualidade.</p>



Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p>■ Problemas de optimização.</p> <p>(*) Demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial.</p>	<p>Os problemas de optimização devem ser escolhidos de modo a que um estudante trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.</p> <p>(*) Os teoremas a demonstrar devem incluir:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– continuidade implica limitação numa vizinhança;</li> <li>– continuidade e <math>f(x) &gt; 0</math> ou <math>f(x) &lt; 0</math> implicam permanência de sinal numa vizinhança de <math>x</math>;</li> <li>– derivabilidade implica continuidade;</li> <li>– derivada da potência inteira e racional e do quociente.</li> </ul>

## Tema III – Trigonometria e Números Complexos

24 aulas de 90 minutos

Completa-se, agora, o estudo da trigonometria que se estuda no ensino secundário. Pretende-se que os estudantes resolvam problemas que apelem simultaneamente ao estudo intuitivo apoiado na calculadora gráfica como ao cálculo de derivadas, em casos simples. Com pretexto de responder a problemas de resolubilidade algébrica amplia-se o conceito de número. As operações com números complexos, nas formas algébrica e trigonométrica são aproveitadas para que o estudante compreenda melhor as diferentes representações analíticas para domínios definidos geometricamente, bem como para dominar as relações entre operações algébricas e transformações geométricas. O estudante precisa dos conhecimentos de Geometria Analítica, em geral, e da Trigonometria e  $\mathbb{R}$ , e precisa de saber resolver equações e inequações dos 1º e 2º graus.

As funções trigonométricas são importantes noutras disciplinas como “Física” e “Química”, pelo que o estudo das funções trigonométricas para os alunos dos respectivos cursos gerais deverá levar em conta este facto. Por isso, é bastante importante haver uma colaboração estreita entre os professores de Matemática e os das outras disciplinas. A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização de actividades comuns ou a leccionação de algum aspecto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores.

### Pré-Requisitos:

Trigonometria do Tema “Geometria no Plano e no Espaço” do 11º ano.

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p><b>Funções seno, co-seno, tangente.</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica ou computador.</li> <li>■ Estudo intuitivo de           <math display="block">\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} .</math> </li> <li>■ Derivadas do seno, co-seno e tangente.</li> <li>■ Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais.</li> </ul>	<p>As propriedades a serem investigadas, recorrendo à calculadora gráfica, são: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíntotas, limites nos ramos infinitos. Os estudantes podem investigar, tal como o fizeram nas famílias de funções anteriores, qual a influência da mudança de parâmetros na escrita da expressão que define a função (em casos simples e se possível ligados a problemas de modelação). As derivadas do seno e do co-seno podem ser obtidas a partir das fórmulas do seno e do co-seno da soma e de que           <math display="block">\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1 .</math> </p> <p>A modelação com funções trigonométricas pode ser feita tanto usando as capacidades específicas da calculadora gráfica (por exemplo, usando a regressão estatística a partir de dados recolhidos experimentalmente ou numa base de dados) como por análise algébrica da adequação de um modelo fornecido pelo professor.</p>

Desenvolvimento	Indicações metodológicas
<p><b>Complexos</b></p> <p>■ Introdução elementar de problemas de resolubilidade algébrica e do modo como se foram considerando novos números. Apropriação de um modo de desenvolvimento da Matemática, através da evolução do conceito fundamental de número. Experimentação da necessidade de <math>i</math>, à semelhança da aceitação da necessidade dos números negativos e fracionários.</p> <p>■ Números complexos. O número <math>i</math>. O conjunto <math>\mathbb{C}</math> dos números complexos</p> <p>■ A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica.</p> <p>■ Representação de complexos na forma trigonométrica. Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para outra.</p> <p>Operações com complexos na forma trigonométrica.</p> <p>Interpretações geométricas das operações.</p> <p>■ Domínios planos e condições em variável complexa.</p> <p>(*) Demonstração de propriedades de Geometria usando números complexos</p>	<p>O estudante precisa de explorar sempre que possível a ligação dos números complexos à geometria. Ela fornece uma perspectiva mais rica dos métodos geométricos com que se trabalha habitualmente – método das coordenadas, dos vectores e das transformações geométricas, bem como uma nova compreensão da demonstração, tornado possível ligar as características numéricas, algébricas e geométricas (ler a brochura referente a este tema).</p> <p>A introdução dos complexos deve ser ancorada numa pequena abordagem histórica, do ponto de vista dos problemas/escolhos que foram aparecendo no desenvolvimento dos estudos matemáticos. Os estudantes podem realizar trabalhos sobre a extensão do conceito de número e sobre problemas de resolubilidade algébrica, quer do ponto de vista histórico, quer do ponto de vista da sua experiência com anteriores desenvolvimentos. Será interessante a referência à impossibilidade da extensão a <math>\mathbb{C}</math> de uma ordenação compatível com a adição e a multiplicação.</p> <p>As operações com complexos podem ser definidas na base da manutenção das propriedades das operações e do quadrado de <math>i</math> ser <math>-1</math>. É aconselhável que <math> z </math> seja introduzido de modo intuitivo, estendendo a noção de valor absoluto de um real (distância de dois pontos no eixo, distância de dois pontos no plano cartesiano) A passagem à forma trigonométrica pode ser feita com referência a outros sistemas de coordenadas. É importante explorar a multiplicação por <math>i</math> e as diversas operações ligadas a outras realidades matemáticas - vectores, operações com vectores, transformações geométricas.</p> <p>A resolução e a interpretação das soluções de condições em <math>z</math>, devem ajudar a compreender a utilidade dos diversos sistemas de representação analítica. O recurso a programas de geometria dinâmica pode ser motivadora para a realização de demonstrações. Assim o professor deve propor que depois de investigadas sejam demonstradas propriedades de polígonos.</p>